

## О ВАЖНОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ РАНГОВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

**Гурина Роза Викторовна**, доктор педагогических наук, профессор кафедры физических методов в прикладных исследованиях инженерно-физического факультета высоких технологий ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет»

✉ roza-gurina@yandex.ru

*В статье раскрывается важность изучения гиперболических ранговых распределений; приводятся примеры их графического построения из образовательной и экономической сфер знаний. Изучение гиперболических ранговых распределений в различных областях знаний способствует адекватному восприятию действительности и расширению границ представлений о научной картине мира.*

**Ключевые слова:** гиперболическое ранговое распределение, гипербола, ранговый анализ, система, закон разнообразия, ценоз, ценологическое мышление.

Научная картина мира как модель мира включает систему научных знаний и представлений о материальном мире, его свойствах и атрибутах, а также способы описания мира [1, 2]. В курсе физики изучаются вероятностные способы описания систем материального мира – распределения Больцмана, Максвелла, Гаусса, Ферми и др., способствующие интеллектуальному развитию учащихся, формированию их системного и теоретического мышления. Однако, многие реальные системы объективного мира, как материальные, так социальные, в том числе образовательные, состоят из объектов с гиперболическими ранговыми распределениями (ГРР), которые составляют неотъемлемую часть теоретических знаний в третьей научной картине мира [3]. Представления о них формирует адекватное восприятие реального мира. Поэтому знакомство учащихся с ГРР является актуальным, не смотря на то, что изучение ранговых распределений (РР) выходит за рамки школьных и вузовских программ.

*Гиперболические ранговые распределения в различных областях знаний* РР является результатом процедуры ранжирования – приведения значений параметра  $W$  объектов системы в соответствие рангу  $r$  (номеру объекта ранжирования) в порядке убывания  $W$ . Убывание рангового параметра  $W$ , происходящее по гиперболическому закону имеет вид:

$$W = \frac{A}{r^\beta}, \quad (1)$$

где  $W$  – ранжируемый параметр системы,  $r$  – ранговый номер элемента в ней (1,2,3...),  $A$  – максимальное значение параметра  $W$  с рангом  $r=1$ ,  $\beta$  – коэффициент, характеризующий степень крутизны гиперболы.

Впервые же ГРР описал Ципф применительно к текстам ( $W$  – частота, с которой встречается определённое слово в тексте) [4].

Применение закона ГРР (1) составляет сущность рангового анализа (РА) или ценологического (ценозологического) подхода, разработанного более 30 лет назад для техноценозов Б.И. Кудриным [3] – основателем школы исследователей, применяющих РА для изучения систем разных видов. Ценоз – «сообщество» – совокупность объектов (особей), имеющих определённое место обитания, РР которых описывается уравнением (1). Отличительная особенность таких сообществ – борьба за ресурсы. Такая терминология заимствована из теории биоценозов. Теория РА довольно глубоко разработана в области техники (к примеру, в электроснабжении промышленных и других видов предприятий) и широко применяется на практике для оптимизации технических систем, в том числе оборонного комплекса [5]. Учёными анализируются также гиперболические распределения в социальных процессах [6]. На большом статистическом материале доказано, что закон ГРР (1) справедлив и для образовательных систем на разных уровнях [7,8]. Объекты ранжирования в них – учащиеся, классы, школы и т.д., их параметры – это успеваемость, рейтинг в баллах, показатели эффективности и т.п. На рис. 1 приведены примеры таких эмпирических графиков с теоретическими аппроксимационными кривыми.  $R^2$  – квадрат коэффициента регрессии (показывает степень приближения эмпирических точек к теоретической гиперболе). Обработка результатов и построение графиков осуществлялось с применением компьютерной программы Origin 7.5 Pro. На рис. 1, а, б представлены графики ГРР рейтинга научной деятельности преподавателей Ульяновского госуниверситета, построенные по данным сайта УлГУ ([www.ulsu.ru](http://www.ulsu.ru)).

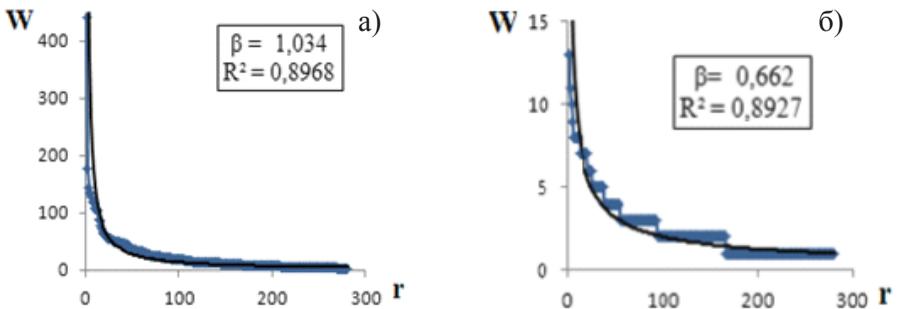


Рис. 1. Рейтинговые ГРР преподавателей УлГУ, где  $W$  – рейтинговый показатель,  $r$  – ранговый номер преподавателя в рейтинговой таблице; а) по количеству опубликованных статей; б) по индексу Хирша.

В обоих случаях  $R^2$  имеет высокие значения и равен 0,90 и 0,89 соответственно, то есть свидетельствует о высокой степени приближения эмпирических точек к теоретическим гиперболам. Коэффициент  $R^2$  может служить показателем валидности тестовых заданий, а также качества системы показателей в оценке эффективности учебных заведений. Чем больше

$R^2$ , тем лучше эмпирические точки ложатся на теоретическую кривую, тем лучше система оценки качества образовательных учреждений, или тем лучше валидность тестов. Адекватный рейтинг, правильно составленные и правильно проверенные олимпиадные, тестовые и контрольные задания приводят к результатам, которые адекватно отражаются гиперболическим законом  $PP(1)$  [8].

Кроме областей техники и социальной сферы, ГРР описывают состояния объектов многих реальных систем материального мира – геологических, экологических, экономических, лингвистических, археологических и др. ([www.kudrinbi.ru](http://www.kudrinbi.ru)). Например Л.Ю. Щапова рассматривает в пределах каждой археологической эпохи совокупность орудий труда и борьбы как древний техноценоз [9]. Получены и построены ГРР из астрономической области знаний ([www.gurinarv.ulsu.ru](http://www.gurinarv.ulsu.ru)): планет солнечной системы по массам, 621 экзопланет (планет других звёздных систем) по массам, астероидов по массам, комет по периодам обращения, химического состава звёзд, почвы Луны, атмосферы Земли и других планет, межзвёздной среды, пульсаров по периодам пульсаций и многие другие [10]. Ряд исследователей используют РА в области экономики для прогнозирования стабильности тех или иных экономических показателей [11].

Из экономической области знаний на рис.2 здесь приведены, построенные нами, ГРР ВВП стран мира и Евросоюза, аппроксимированные математической зависимостью (1) с довольно высокой точностью:  $R^2$  равен 0,86 и 0,85 соответственно.

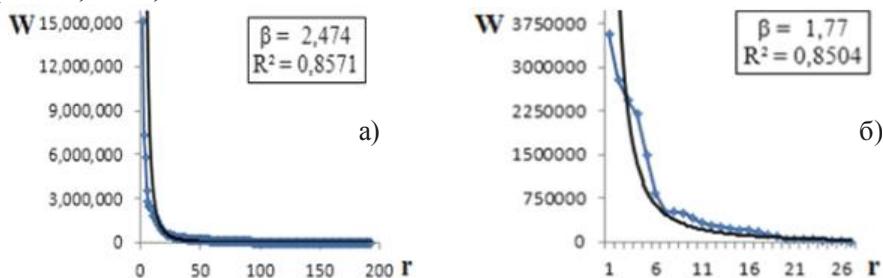


Рис.2. ГРР стран мира и Евросоюза по ВВП:

а) стран мира на 2011 год;  $r = 1$  – США, 2 – Китай, 3 – Япония, 4 – Германия, 9 – Россия, 34 – Греция, 192 – Тувалу;  $W$  – ВВП в млн. €,  $r$  – ранговый номер страны;

б) стран ЕС на 2012 год;  $r = 1$  – Германия, 12 – Греция, 27 – Мальта.

Из 192-х стран мира (рис. 2, а) 80% мирового богатства сосредоточено лишь в 18 странах, которые составляют 9,4% от общего числа (18/192). Примерно также обстоят дела в Евросоюзе: 76% богатства 27 стран ЕС сосредоточено в 6 странах ( $r = 1 - 6$ ), составляющих 22% всех стран Евросоюза (рис 2, б). Закон ГРР для различных реальных систем даёт объяснение того факта, что лучших объектов в любом ценозе мало – не более 20%.

*Значение РА для методологии науки.*

А) *Закон ГРР и закон Парето.* Закон ГРР (1) являет собой уточнённую версию широко известного закона Парето или принципа дисбаланса 80/20, согласно которому диспропорция является неотъемлемым свойством системы [12]. Например, в бизнесе 20 % ассортимента ходовой продукции даёт 80 % дохода; 20 % профессоров учреждения выполняют 80% всей научной работы; лишь 20 % детей используют 80 % возможностей, представляемой системой образования страны; 20% преступников совершают 80% преступлений; около 80% европейского ВВП сосредоточено в 6-и странах и т.д. Согласно вышесказанному, Германии никогда не удастся подтянуть проблемные страны Евросоюза до своего экономического уровня, вопреки объективным законам ГРР (1) и Парето. Совокупность стран ЕС представляет собой устойчивый ценоз с неравномерным развитием экономик, который объективно описывается законом ГРР (1) (рис.2, б).

Принцип 20/80 до сих пор плохо учитывается в педагогике. Советская система образования содержала идею всеобщего равенства и единообразия. В любом классе, среди учащихся должны быть «звёзды», но должны быть и «средние» и «слабые», и это нормальное устойчивое состояние системы. Распределение (1) обосновывает закономерности функционирования учебной группы как ранговой системы: отсев неуспевающих, ограниченное число олимпиадников, медалистов. Значение ценологического (ценозологического) подхода в педагогике состоит в том, что он позволяет формировать состязательную среду здоровой конкуренции в образовательном пространстве учебной группы. Осознание учащимися своего места в ранговой системе, что все они не одинаковые, формирует у них ценологическое (ценозологическое) мышление, которое позволяет оценить свои возможности в постановке реальных целей и задач, мотивирует и побуждает к действию найти средства, с помощью которых каждый учащийся сможет улучшать параметры успеваемости и «двигаться вверх по ранговой кривой». Задача учителя, воспитателя найти для каждого учащегося такое РР, в котором он будет в числе первых (если не учёба, то спорт, художественная самодеятельность, музыка, шахматы и т.д.).

Знание закона (1) и обязательная визуализация его в виде построения графических РР рейтинга успеваемости учащихся класса (группы, курса) необходимы для управления образовательным процессом и его оптимизации. Наличие РР в виде списка не даёт информации о характере убывания: убывание может происходить по любому другому закону. Только графическое изображение табличных данных РР и их аппроксимация зависимостью (1) обеспечивает наглядность и знание о характере рангового убывания.

Б) *Закон ГРР и закон необходимого разнообразия Эшби.* ГРР – это визуализированный в графическом исполнении закон разнообразия Эшби. В настоящее время разнообразие признано одним из основополагающих универсальных характеристик систем (технических, естественнонаучных, социальных и, в том числе, педагогических). У. Р. Эшби сформулировал в

кибернетической теории систем основной принцип управления, названный им законом необходимости разнообразия: разнообразие управляющей системы должно быть не меньше разнообразия управляемой системы (среды). Смысл закона в том, что управляющая система должна обладать свойством изменять своё разнообразие в ответ на возмущение управляемой среды, а при возникновении проблемы необходимо, чтобы управляющая система имела большее разнообразие, чем разнообразие решаемой проблемы. В противном случае такая управляющая система не сможет решать задачи управления, будет малоэффективной и непригодной (Эшби, 1959).

Однако, каким должно быть необходимое разнообразие? Каков его характер? Эшби не даёт ответа. Гиперболический закон РР является математическим выражением закона разнообразия, т.е. принцип Эшби и закон РР (1) – две стороны одной медали. Значение понятия «необходимое разнообразие» приобретает конкретный смысл – это разнообразие параметров системы, которое в РР образует гиперболу. Всякое отклонение от гиперболы в РР приводит систему к дисбалансу и затем к разрушению. Закон ГРР для различных реальных систем отражает реальное разнообразие объектов в системе и даёт объяснение того факта, что лучших объектов в любом ценозе мало – не более 20% , сколько именно – это зависит от крутизны гиперболы – рангового коэффициента  $\beta$ . Основной же «вес» в систематике гиперболического РР принадлежит среднестатистическому большинству (по терминологии ценологической теории – «саранчёвой касте»). Чем больше крутизна гиперболы  $\beta$ , тем менее разнообразна система – лучших особей становится меньше, средних и плохих больше. С уменьшением  $\beta$  ГРР стремится к равномерному (линейному) убыванию параметра  $W$  – состоянию с максимальным разнообразием. Поясним сказанное на примере рейтингового РР успеваемости. Если в такой системе убывание рейтингового параметра  $W$  происходит линейно, то учащиеся по уровням успеваемости разделяются поровну на 3 большие группы: число лучших, средних и слабых в каждой группе будет составлять поровну – по 1/3 в каждой категории. Однако, в реалиях это не так – число лучших (в ценологии это «кнова каста») в группе всегда мало, либо единицы. Полное отсутствие разнообразия  $\beta=0$  (график  $W = \text{const}$ ) соответствует ситуации, когда все учащиеся имеют одинаковый рейтинг), однако, такое состояние образовательной системы не соответствуют реалиям. Закон ГРР является количественным отражением закона разнообразия Эшби и , по сути, является законом сохранения гиперболического разнообразия.

*Использование РА при изучении распределения случайных величин.* Опыт проведения практических занятий по решению задач и проведения лабораторных работ на эту тему показал, что понимание студентами распределения Гаусса и его параметра – дисперсии существенно упрощается при наглядном представлении объектов Гауссового распределения в виде РР. Для этого вводится дополнительное задание, которое студенты выполняют в 2 этапа: 1) ранжируют совокупность значений параметров Гауссового распределения  $W$  в порядке убывания  $W$ ; 2) строят график РР  $W$  ( $r$ ).

Такой график имеет вид S-образной кривой, рис. 3, б, симметричный относительно биссектрисы прямого угла, образующего координатные оси. График Гауссового распределения  $f(W)$  (рис. 3, а) для наглядности повернут на 90 градусов в плоскости рисунка по отношению к графику рис. 3, б. Из сопоставления обоих графиков видно, что большинство значений параметра  $W$  лежат в пределах значений 160-240. Приведённые на рис. 3 графики построены с использованием программы Matlab и метода обратных функций, позволяющих осуществить имитационное моделирование случайных чисел (выборка 10000) с заданным Гауссовым распределением. С уменьшением дисперсии Гауссового распределения крутизна S-образной характеристики ПР увеличивается, угол  $\alpha$  между касательной к S-кривой в точке перегиба и горизонтальной осью уменьшается. Вышесказанное позволяет утверждать, что методология научных исследований пополнилась дополнительным методом, позволяющим идентифицировать принадлежность выборки значений случайных величин к Гауссовому распределению по внешнему S-образному виду графика ПР.

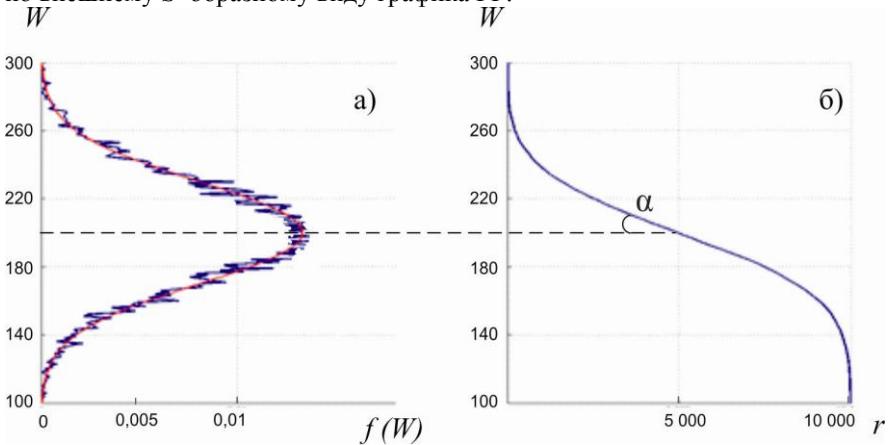


Рис.3. Гауссово частотное распределение  $f_i = f(W)$  (а) и, соответствующее ему, ПР этих же величин  $W(r)$  (б).

Таким образом, понимание статистических Гауссовых закономерностей упрощается при привлечении РА в методику их изучения.

Гиперболические ПР изучаются в УЛГУ в рамках проектной научной деятельности студентов в процессе выполнения ими выпускных квалификационных работ и магистерских диссертаций, а также на текущих практических занятиях и семинарах со студентами, получающими дополнительную квалификацию «Преподаватель».

Таким образом, изучение реальных ГРР в математическом и графическом выражении из различных областей знаний позволяют пополнить систему знаний о мире и расширить границы представлений о научной картине мира у школьников и у будущих специалистов – студентов вузов. По-

лучение знаний о ГРП особенно важно для обучающихся по направлению «Управление качеством».



### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пурьшева Н.С., Гурина Р.В. Интерпретации физической картины мира //Знание. Понимание. Умение. – 2011. – №2. – С.50-55.
2. Соколова Е.Е., Гурина Р.В. О соотношении языковой и научной картин мира // Знание. Понимание. Умение.– 2010, №3. – С. 83-88.
3. Кудрин Б.И. Введение в технетику. Томск: Изд-во ТГУ, 1993. 552 с.
4. Zipf J.K. Human behaviour and the principle of least effort / – Cambridge (Mass.): Addison-Wesley Pres, 1949, XI. 574 p.
5. Гнатюк В.И.. Оптимальное построение техноценозов. Теория и практика М.: Центр системных исследований.- 1999. – 272 с.
6. Петров В.М., Яблонский А.И. Математика и социальные процессы: гиперболические распределения и их применение.М.: Знание. 1980. – 64 с
7. Гурина Р.В.). Ценологические исследования педагогических образовательных систем//Ползуновский вестник. –2004, №3. –С.133-138.
8. Гурина Р.В. Ранговый анализ образовательных систем (ценологический подход). Методические рекомендации для работников образования. «Ценологические исследования». М.:Технетика. – 2006. 40 с.
9. Щапова Ю.Л. «Уровень сложности организации»– известная идея в основе изучения древних техноценозов/ Междисциплинарность ценологических исследований. Общая и прикладная ценология. Материалы XIV конференции по технетике и общейценологии с международным участием (Москва, МЭИ, 19 ноября, 2009 г) Вып 43. «Ценологические исследования» - М.: Технетика.–2010.– С.209-214.
10. Гурина Р.В. Космические системы как астроценозы. / Ценологическое моделирование: теоретические основания и практические результаты. Материалы XV конференции по философии техники и технетике и семинара по ценологии (Москва, МЭИ, 19 ноября, 2010 г) Вып 47. «Ценологические исследования» – М.: Технетика. –2011. – С. 178 – 185.
11. Фуфаев В.В. Экономические ценозы организаций. – М.:Абакан: Центр системных исследований. – 2006. – 86 с.
12. Кох Р. Закон Парето или принцип 80/20 //Общая и прикладная ценология. 2007. – №4. – С.76-79.
13. Эшби У.Р. Введение в кибернетику. Изд. ин.литературы. – 1959. – 432 с.